LA TEORÍA DEL CAOS Y SUS PROBLEMAS EPISTEMOLÓGICOS

Olimpia Lombardi
Universidad de Buenos Aires

Introducción

Durante las últimas tres décadas, la llamada "Teoría del Caos" ha abierto un nuevo y fructífero campo de investigación, donde se entrecruzan problemas propios de disciplinas tan disímiles como, por ejemplo, la física, la biología o la economía. Sin embargo, el rápido crecimiento de este campo de estudio no ha venido acompañado de un proporcional desarrollo de la reflexión epistemológica acerca del tema. ¿Qué tipo de teoría es la Teoría del Caos?, ¿a qué se aplica el predicado "caótico"?, ¿cómo se define la noción de caos?: todas estas cuestiones han recibido una muy escasa atención dentro del gran caudal de trabajos que, actualmente, tocan temas relativos a la filosofía de la ciencia.

El presente artículo pretende ser una pequeña contribución destinada a revertir tal panorama. Aquí se intentará brindar una aproximación satisfactoria a las preguntas formuladas, desde una perspectiva epistemológica. En particular, se señalarán los diversos problemas que surgen cuando se pretende hallar una definición única, que resulte adecuada para las diferentes formas bajo las cuales se manifiesta el comportamiento caótico.

Características generales del caos

Durante el siglo XIX, entre los físicos prevalecía la idea de que los sistemas mecánicos debían presentar un comportamiento regular y predictible en la medida en que resultaba descripto por ecuaciones diferenciales. Pero esta idea sufrió un duro golpe cuando, sobre finales del siglo, Henri Poincaré (1892) demostró que aun ciertos sistemas regidos por las ecuaciones de Hamilton podían evolucionar de un modo irregular y aperiódico[1]. Uno de los grandes méritos de Poincaré fue su modo de

[1] Una interesante presentación de los aportes de Poincaré en este ámbito puede encontrarse en Chabert y Dalmedico (1991).

abordar problemas clásicos desde perspectivas totalmente originales: sus métodos, basados en un enfoque geométrico y topológico, fueron más cualitativos que cuantitativos y brindaron el marco teórico para las actuales investigaciones sobre sistemas dinámicos inestables. Sin embargo, fue necesario que transcurrieran setenta años para que el meteorólogo E. N. Lorenz, en 1963, pudiera obtener los primeros resultados cuantitativos: gracias a su primitiva computadora, Lorenz calculó la evolución generada por un sencillo sistema de tres ecuaciones diferenciales no lineales, mostrando que tal evolución correspondía a un comportamiento irregular y aperiódico, que luego pasó a denominarse "caótico"[2].

Pero, en un sistema dado, ¿cómo se manifiesta el comportamiento caótico? Algunas de sus características se asemejan mucho a las del ruido y, por ello, sugieren la presencia de componentes aleatorios:

- La señal generada por el sistema "parece" totalmente aperiódica, errática, carente de toda regularidad, y no se estabiliza con el transcurso del tiempo (no pasa a un régimen periódico).
- La función de autocorrelación de la señal decae rápidamente, de modo similar al caso del ruido blanco.
- El espectro de Fourier de la señal también se parece al del ruido blanco.
- La señal presenta el fenómeno de difusión, normalmente asociado al movimiento browniano (movimiento de una partícula sometida a fuerzas aleatorias en un medio de alta fricción).

Sin embargo, el comportamiento caótico también posee otras características que le son propias:

- A diferencia del ruido –de origen térmico–, la señal caótica no puede "sosegarse" bajando la temperatura.
- También a diferencia del ruido, genera una trayectoria que se mantiene en una zona limitada del espacio de las fases correspondiente al sistema[3].
- A pesar de su aparente irregularidad, el comportamiento caótico responde a una regularidad subyacente, en la medida en que puede describirse mediante un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales.
- Esta no linealidad hace inaplicable el principio de superposición: la señal caótica no puede interpretarse como la superposición indicada por una serie de Fourier. Por lo tanto, el espectro de Fourier de la señal no la representa adecuadamente.

2 Una popular introducción al tema es la que brinda Gleick (1988).

3 Se denomina "espacio de las fases" a un espacio euclídeo de tantas dimensiones como variables de estado posea el sistema; en tal espacio, cada punto representa un estado posible del sistema y, dado el punto correspondiente al estado inicial, la evolución temporal del sistema queda representada por una trayectoria que se inicia en dicho punto.

- El fenómeno de difusión no depende de la presencia de fuerzas aleatorias, sino de la propia dependencia temporal de la señal.

Estas características ponen de manifiesto que el comportamiento caótico no se debe a la presencia de fuentes de ruido, ni a la incertidumbre asociada a la Mecánica Cuántica, ni a un elevado número de grados de libertad (el sistema de Lorenz tiene solo tres grados de libertad); el epifenómeno de la irregularidad del comportamiento caótico es exclusivamente resultado de la propia dinámica interna del sistema. Por lo tanto, si se desea investigar las características de tal irregularidad, así como descubrir la regularidad subyacente que rige este tipo de comportamiento, es necesario pasar al estudio de las ecuaciones que lo describen.

Aspectos matemáticos del caos

En primer lugar, es necesario recordar las características generales de las ecuaciones diferenciales utilizadas en ciencias fácticas para la descripción de sistemas dinámicos que pueden dar lugar a un comportamiento caótico. Desde el punto de vista matemático, se trata de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, esto es, que poseen una única variable independiente: no entran en juego aquí las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Dichos sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias cumplen las condiciones necesarias para asegurar la existencia y la unicidad de sus soluciones para cada conjunto de valores de las variables dependientes[4]. Desde el punto de vista fáctico, la variable independiente representa el tiempo, las variables dependientes –variables de estado– representan las magnitudes que definen el estado del sistema, y cada solución describe la evolución temporal del sistema dadas las condiciones iniciales –valores iniciales de las variables de estado.

Un recurso ampliamente utilizado en ciencias consiste en representar el comportamiento de un sistema dinámico en el espacio de las fases correspondiente. Gracias a esta representación, es posible expresar en lenguaje geométrico las propiedades de existencia y unicidad antes mencionadas: dado un sistema dinámico, para cada punto representativo de su estado inicial, la trayectoria que en él se inicia existe y es única; además, dado que no hay restricciones para fijar el estado inicial del sistema, las trayectorias no pueden cortarse en ningún punto, es decir, no existe ningún estado a partir del cual el sistema evolucione temporalmente según dos o más trayectorias posibles.

4 Dada una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, si se cumplen las siguientes condiciones: (i) puede expresarse en su forma normal $dx/dt = F(x,t)$; (ii) $F(x,t)$ y dF/dx son continuas en un cierto dominio D del plano Oxt; y (iii) (x_0,t_0) es un punto de tal dominio, entonces existe una solución única $x(t)$ de tal ecuación diferencial que satisface $x = x_0$ para $t = t_0$. Este teorema de existencia y unicidad puede encontrarse en textos avanzados sobre cálculo diferencial; por ejemplo, *cfr.* Piskunov (1994).

La representación en el espacio de las fases permite, a su vez, caracterizar de un modo más sencillo que el puramente matemático una noción central en el estudio del comportamiento de los sistemas dinámicos: el concepto de estabilidad. Se dice que una trayectoria que parte de un cierto punto es estable si, dada cualquier trayectoria que se inicia a una distancia arbitraria $\delta>0$ del punto original, la distancia entre ambas trayectorias se mantiene acotada por debajo de un valor finito $\varepsilon>0$ para todo instante posterior al instante inicial[5]. Fácticamente esto significa que la evolución temporal de un sistema es estable si sufre pequeñas variaciones frente a modificaciones también pequeñas de las condiciones iniciales; por ejemplo, éste es el caso del comportamiento de un péndulo ideal sin fricción ni rozamiento para distintos ángulos de oscilación. Las situaciones de evolución estable eran los casos típicamente estudiados en física durante el siglo XIX, cuando se creía que todo sistema regido por la clásica Mecánica Hamiltoniana debía cumplir con la propiedad de estabilidad en sus posibles evoluciones; fueron precisamente los trabajos de Poincaré los que demostraron la existencia de sistemas hamiltonianos que, contra la creencia tradicional, pueden presentar evoluciones temporales inestables. El estudio de la estabilidad en sistemas dinámicos fue uno de los elementos teóricos fundamentales para el posterior desarrollo de la Teoría del Caos.

¿Cuáles son las características específicas de las ecuaciones que describen un comportamiento caótico? Si bien la definición precisa del concepto de caos continúa siendo objeto de debate, entre los especialistas existe un consenso prácticamente unánime acerca de ciertos puntos:

- Los sistemas que pueden presentar comportamiento caótico quedan descriptos por sistemas de ecuaciones diferenciales de la forma:

  $$dx/dt = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},r)$$

  donde $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$, $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, \dots, F_d)$ y r es un parámetro. Tales ecuaciones son:

  - *autónomas*: $\boldsymbol{F}$ no depende explícitamente de la variable tiempo.

  - *no lineales*: $\boldsymbol{F}$ es una función no lineal de las $\{x_j\}$.

  En otras palabras, no linealidad y autonomía de las ecuaciones diferenciales son condición necesaria pero no suficiente para el comportamiento caótico.

- Todo sistema de comportamiento caótico es *sensible a las condiciones iniciales*. Esto significa que, en el espacio dc las fases correspondiente, las trayectorias divergen exponencialmente. Por ejemplo, supóngase un sistema descripto por una

[5] En ciencias suelen utilizarse distintas nociones de estabilidad. Aquí se ha presentado únicamente el concepto de "*estabilidad según Lyapounov*" debido a su relevancia para la discusión posterior. En términos puramente matemáticos: dada la ecuación $dx/dt = F(x,t)$, cuya solución $x_1(t)$ satisface $x_1(t = t_0) = x_{01}$ y cuya solución $x_2(t)$ satisface $x_2(t = t_0) = x_{02}$, se dice que la solución $x_1(t)$ es *Lyapounov-estable* cuando, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, para todos los valores de $t > t_0$, si se cumple que $|x_{02} - x_{01}| < \delta$, entonces también se cumple que $|x_2(t) - x_1(t)| < \varepsilon$. Aquí también puede consultarse Piskunov (1994).

única ecuación diferencial $dx/dt = F(x)$ y sean dos puntos separados una distancia d, la distancia entre las trayectorias que se inician en tales puntos debe aumentar exponencialmente con el tiempo según δe^{ht}, donde h se denomina "*exponente de Lyapounov*" y mide, precisamente, tal divergencia exponencial ($h > 0$). Por lo tanto, la sensibilidad a las condiciones iniciales que exhiben los sistemas de comportamiento caótico implica su inestabilidad: la evolución temporal del sistema manifiesta grandes variaciones frente a pequeñas modificaciones de las condiciones iniciales.

Lo dicho hasta aquí puede generalizarse en dos sentidos. En primer lugar, debe considerarse el caso general de un sistema con d variables de estado, cuya evolución temporal se representa en un espacio de la fases Γ d-dimensional. En este caso existen d exponentes de Lyapounov h_n, uno por cada dirección x_n de Γ, cumpliéndose que:

- Los $h_i > 0$ indican divergencia exponencial en las direcciones x_i.
- Los $h_j < 0$ indican contracción exponencial en las direcciones x_j.

En segundo lugar, hasta aquí se ha hablado de sistemas de ecuaciones diferenciales, pero también se da el caso de comportamiento caótico descripto por ecuaciones en diferencias finitas, $\mathbf{x}_{n+1} = \boldsymbol{F}(\mathbf{x}_n,r)$ con $\mathbf{x}_n = (x_{1n}, x_{2n}, ..., x_{dn})$ y $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, ... , F_d)$, donde son aplicables las mismas consideraciones anteriores: no linealidad y autonomía como condición necesaria, y sensibilidad a las condiciones iniciales.

Esta sensibilidad a las condiciones iniciales conduce a una importante consecuencia respecto de la predictibilidad de los estados futuros de los sistemas de comportamiento caótico. En la práctica, la precisión finita de nuestros instrumentos de medición impide conocer con precisión infinita el estado inicial de un sistema. Si se trata de un sistema de comportamiento regular y estable, la situación no es grave: pequeñas incertidumbres en la determinación empírica de las condiciones iniciales se convierten en incertidumbres grandes pero acotadas (aumentan linealmente con el tiempo) en el curso ulterior de la evolución. Pero si el sistema presenta un comportamiento caótico, las pequeñas incertidumbres iniciales se amplifican exponencialmente con el transcurso del tiempo de modo tal que, en la práctica, para tiempos muy superiores a $1/h$ ($\tau = 1/h$ se denomina "*tiempo de Lyapounov*") la predicción unívoca de los estados futuros del sistema se torna imposible. En otras palabras, a medida que transcurre el tiempo se produce una pérdida de información acerca del estado preciso en el que se encuentra el sistema; intuitivamente, en $t = 0$, la localización del punto representativo con una precisión δ brinda mayor información que su localización dentro de $\delta e^{h\Delta t}$ luego del intervalo Δt. La Teoría del Caos suministra una magnitud que permite precisar esta noción intuitiva: la *K-entropía* o entropía de Kolmogorov mide la velocidad media de pérdida de información acerca del estado preciso en el que se encuentra el sistema dinámico.

En tanto medida de información, la K-entropía se calcula mediante los métodos de Shannon: la estrategia general consiste en dividir el espacio de las fases en celdas y considerar las probabilidades asociadas a las diferentes transiciones entre celdas; puede demostrarse que el valor de la K-entropía es independiente de la particular partición considerada (*cfr.* Schuster, 1989; para una demostración formal, *cfr.* Farmer, 1982). En consecuencia, la K-entropía puede considerarse como un indicador de "qué tan caótico" es el comportamiento de un sistema y, como era de esperar, resulta proporcional al exponente de Lyapounov o, en general, a la suma de los exponentes de Lyapounov positivos.

Cuestiones epistemológicas

En la actualidad se ha desarrollado un amplio campo de estudio dedicado a investigar las propiedades de sistemas de ecuaciones no lineales, tanto diferenciales como en diferencias finitas (por ejemplo, mapas de una o dos dimensiones), que pueden dar lugar a un comportamiento caótico. En algunos casos, la formulación del sistema de ecuaciones responde al interés de describir el comportamiento de algún sistema real particular; en otros casos, se trata de ecuaciones que no refieren directamente a sistemas reales, pero cuyo estudio resulta útil para comprender la dinámica propia del comportamiento caótico. Al mismo tiempo, se han ido encontrando diversos sistemas reales –biológicos, físicos, químicos, económicos, etc.– que, convenientemente modelados, responden adecuadamente al tipo de ecuaciones que caracterizan las dinámicas caóticas; por lo tanto, el comportamiento aparentemente errático de tales sistemas puede ahora ser explicado como manifestación de una regularidad subyacente. No obstante, aún puede formularse una serie de preguntas de orden epistemológico en relación a la Teoría del Caos.

En primer lugar, ¿qué tipo de teoría es la Teoría del Caos? Considerada con independencia de su génesis histórica y de las motivaciones para su desarrollo, la Teoría del Caos no es una teoría fáctica en sentido estricto: el comportamiento caótico puede producirse en cualquier tipo de sistema real, sea físico, biológico, económico, etc.; incluso dentro del ámbito de la física, el caos puede manifestarse en sistemas descriptos por la Mecánica Clásica, la Mecánica Cuántica o cualquier otra teoría referida a la dinámica de entidades físicas[6]. El comportamiento caótico es resultado de las propiedades de las ecuaciones que describen la dependencia temporal de un sistema y, por tanto, no se encuentra ligado a teoría fáctica particular alguna. En consecuencia, la Teoría del Caos podría ser abordada desde una perspectiva puramente sintáctica, con independencia de la interpretación semántica de las variables involucradas en el sistema de ecuaciones bajo estudio; ello indica que, en rigor, la Teoría del Caos es una teoría matemática acerca de las propiedades de las soluciones de cierto tipo de ecuaciones diferenciales (o en diferencias finitas) no lineales. No resulta sorprendente, entonces, la amplia aplicabilidad de la Teoría del Caos a muy

6 Curiosamente, parece haberse establecido que los sistemas cuánticos resultan ser "menos caóticos" que sus contrapartidas clásicas, de modo tal que la Mecánica Cuántica "atenuaría" los efectos del caos (*cfr.* Schuster, 1989; Casati, 1991).

diferentes ámbitos de la realidad, del mismo modo que no nos sorprende la gran diversidad de sistemas abordables mediante el cálculo diferencial lineal de Leibniz y Newton. Sin embargo, en general, la teoría se aplica al estudio de ecuaciones dinámicas (al igual que el tradicional cálculo diferencial), donde la variable independiente representa la dimensión temporal; de este modo, el interés pasa a centrarse en sistemas cuyo comportamiento temporal se describe mediante cierto tipo de ecuaciones dinámicas y queda representado por una trayectoria (continua o discreta) en el espacio de las fases correspondiente.

En segundo lugar, ¿a qué se aplica el predicado "caótico"? Dado que la Teoría del Caos es esencialmente una teoría matemática, el predicado "caótico" se aplica, en sentido propio, a ciertas ecuaciones que son soluciones de ecuaciones diferenciales autónomas y no lineales. Sin embargo, como la teoría suele dirigirse al estudio de ecuaciones dinámicas, el predicado "caótico" pasa derivativamente a aplicarse a los procesos descriptos por tales ecuaciones. Algunos autores hablan de "sistemas caóticos" para referirse a aquellos sistemas que describen procesos caóticos; pero tal extensión en la aplicación puede conducir a confusiones si no se recuerda cómo se origina la caoticidad. En efecto, un sistema de ecuaciones diferenciales $d\mathbf{x}/dt = \boldsymbol{F}(\mathbf{x}, r)$ puede tener soluciones caóticas para ciertos valores del parámetro r y soluciones no caóticas para otros valores del mismo parámetro. Por lo tanto, un mismo sistema –definido por un sistema dado de ecuaciones diferenciales– puede presentar un comportamiento caótico para algunos valores de un vínculo externo –expresados como valores del parámetro r– y no para otros valores. Por esta razón, en lugar de hablar de "sistemas caóticos" es más riguroso referirse a sistemas de *comportamiento caótico*, en la medida en que tal terminología toma en consideración los distintos factores que contribuyen a la caoticidad de los procesos que un sistema describe.

Por último, cabe detenerse en los variados comentarios acerca del supuesto carácter indeterminista de la Teoría del Caos; en este sentido, algunos autores colocan esta teoría en una posición equivalente a la Mecánica Cuántica en lo que se refiere al colapso de la concepción determinista del universo, e incluso creen encontrar en la Teoría del Caos la respuesta al viejo problema del libre albedrío (*cfr.* Crutchfield *et al.*, 1987; Davies, 1990). En primer lugar, cabe recordar que la Teoría del Caos es una teoría matemática ajena, en principio, a consideraciones de orden temporal; solo cuando la Teoría del Caos es interpretada como una teoría acerca del comportamiento de cierto tipo de sistemas dinámicos, entra en escena el problema del determinismo, problema que solo cobra sentido en relación con la evolución temporal de los sistemas reales o a las ecuaciones que describen tales evoluciones. Pero aquí la cuestión que debe subrayarse es que las limitaciones predictivas que surgen de la Teoría del Caos no se deben al carácter estadístico de las ecuaciones; por el contrario, las ecuaciones que describen el comportamiento caótico de un sistema son totalmente deterministas: dadas las condiciones iniciales, fijan el valor de las variables de estado para todo tiempo futuro. En el caso continuo, la condición de determinismo se expresa en el hecho de que las trayectorias en el espacio de las fases nunca pueden cortarse, esto es, no puede existir ningún punto origen de más de una trayectoria posible. Por esta razón, para referirse a este tipo de comportamiento muchos autores utilizan el término "caos determinista", con el fin de diferenciarlo de los fenómenos cuya irregularidad se supone producto de elementos aleatorios. En consecuencia, la Teoría del Caos no implica en modo alguno indeterminismo ontológico, siquiera en el caso de una interpretación realista de las ecuaciones "caóticas" como descripción de regularidades inscriptas en el plano real. Por el contrario, brinda un excelente argumento para el determinista ontológico quien, con su ayuda, puede mostrar que muchos procesos aparentemente aleatorios y carentes de toda regularidad, en realidad responden a leyes deterministas subyacentes que restauran la dependencia temporal unívoca entre los estados del sistema, si bien no permiten la predicción unívoca para todo instante futuro (*cfr.* Lombardi, 1999).

El problema de la definición

En contraste con el rápido desarrollo de la Teoría del Caos, tanto en sus aspectos teóricos como en sus aplicaciones prácticas[7], el concepto de caos sigue sin hallar una definición totalmente general y adecuada. Algunos autores intentan definir el comportamiento caótico a partir de su impredictibilidad; por ejemplo, Mark Stone (1989, p. 129) considera que éste es el camino más natural para distinguir entre los sistemas caóticos y los que no lo son. En una línea similar, G. M. K. Hunt (1987, p.130) pretende caracterizar el comportamiento caótico como aquél cuya impredictibilidad se funda en el hecho de no presentar continuidad ante variaciones de las condiciones iniciales. En su minucioso análisis de la cuestión, Robert Batterman (1993) impugna ambos intentos, señalando correctamente que la impredictibilidad es una consecuencia del caos en los sistemas dinámicos, pero no una condición suficiente para ello; en efecto, existe una multiplicidad de factores que pueden convertir un sistema en impredictible (fenómenos cuánticos, ruido, elevado número de grados de libertad, etc.) sin que por ello se trate de un sistema de comportamiento caótico. En particular, Batterman (pp. 53-54) señala la confusión en la que incurre Hunt: la condición de continuidad –que es la que cumple una ecuación diferencial si admite una única solución que depende de manera continua de las condiciones iniciales– puede no cumplirse en el caso de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Pero en el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias que cumplen las condiciones para la existencia y unicidad de sus soluciones, puede demostrarse que la condición de continuidad también se cumple siempre: como ya fue señalado, éste es precisamente el tipo de ecuaciones diferenciales objeto de estudio de la Teoría del Caos. En consecuencia, la divergencia exponencial de las trayectorias propia del comportamiento caótico no implica, como supone Hunt, que la posición del punto representativo en el espacio de las fases "salte de un modo incontrolado" (Hunt, 1987, p.131) ante variaciones de las condiciones iniciales.

7 Acerca de la aplicaciones tecnológicas de la Teoría del Caos, *cfr.* Ditto y Pecora (1993) y Neff y Carroll (1993).

Otra muy difundida línea de argumentación es la que asocia los conceptos de caos y de aleatoriedad a través de la definición de *complejidad algorítmica* de Chaitin, Kolmogorov y Solomonov. El núcleo conceptual de la propuesta consiste en definir la complejidad algorítmica de una secuencia de símbolos como la longitud del programa computacional más corto que puede generar tal secuencia en una máquina de Turing: la secuencia será algorítmicamente aleatoria si posee complejidad algorítmica máxima, esto es, si el programa más corto que puede generarla tiene aproximadamente la misma longitud que la propia secuencia[8]. Sobre la base de tales nociones, Joseph Ford sostiene que: *"en un sentido técnico estricto, caos es meramente un sinónimo para la aleatoriedad, tal como la teoría de la complejidad algorítmica [...] así claramente lo revela"* (Ford, 1989, p. 350). La estrategia de Ford consiste en dividir el espacio de las fases en celdas numeradas y asociar la trayectoria en dicho espacio con la secuencia de los números de las celdas que sucesivamente va ocupando el punto representativo del estado del sistema. Un teorema de A. A. Brudno (1978) le permite, a su vez, asociar la complejidad algorítmica de la secuencia con la noción de *K*-entropía del sistema: según este teorema, si una particular secuencia de salida de un sistema dinámico abstracto es algorítmicamente aleatoria, en general el sistema poseerá una *K*-entropía positiva. Efectuados estos pasos, Ford establece que: *"si puede demostrarse que la secuencia de los números de las celdas correspondientes a una órbita es aleatoria, entonces la órbita misma es también aleatoria"* (Ford, 1983, p. 43). El así definido carácter aleatorio de la trayectoria en el espacio de las fases constituye, para el autor, la manifestación del comportamiento caótico del sistema.

No obstante su precisión, Batterman rechaza también esta definición algorítmica de caos, en la medida en que ella considera únicamente la salida del sistema, ignorando por completo la dinámica subyacente que genera tal salida (Batterman, 1993, p. 163). En efecto, una salida algorítmicamente aleatoria puede obtenerse, tanto a partir de una partición de grano grueso sobre una trayectoria caótica, como a partir de un sistema de comportamiento regular en el cual la aleatoriedad de la salida es consecuencia de la aleatoriedad del estado en el que se inicia el proceso (este argumento se tratará en detalle más adelante). Por lo tanto, la definición algorítmica refiere a una consecuencia del caos y no a lo que le brinda especificidad.

A esta crítica puede agregarse una nueva objeción basada en el concepto de *K*-entropía. Como ya fue señalado, tal magnitud mide la velocidad media de pérdida de información acerca del estado en el que se encuentra el sistema dinámico; de acuerdo con esta definición, la *K*-entropía puede adquirir tres tipos de valores relevantes (*cfr.* Schuster, 1989, pp. 99-100):

8 Una máquina de Turing es un dispositivo abstracto que, según se demuestra, puede simular el comportamiento de cualquier computadora digital, aun la más compleja. Este concepto fue introducido por el matemático inglés Alan Turing en 1936.

(*a*) *Comportamiento regular*: $K = 0$. Esto significa que, dada la celda inicial, pueden conocerse con certeza las celdas siguientes en toda la evolución: no hay pérdida alguna de información.

(*b*) *Comportamiento caótico*: $K > 0$ y finito. Esto significa que, dada la celda inicial C_0, la celda subsiguiente puede ser una entre las e^h celdas cubiertas por la divergencia exponencial de las trayectorias que se inician en C_0: la información se pierde a una velocidad proporcional a h ($K \approx h > 0$).

(*c*) *Comportamiento aleatorio*: $K \to \infty$. Esto significa que, dada la celda inicial C_0, la celda subsiguiente puede ser, con igual probabilidad, cualquiera de las infinitas celdas en las que se subdividió el espacio de las fases: hay una *inmediata* pérdida total de la información.

El problema de la definición algorítmica de caos reside en el hecho de que el concepto de aleatoriedad algorítmica no permite diferenciar entre los casos (*b*) y (*c*): en ambas situaciones la secuencia de salida tendrá complejidad algorítmica máxima y $K > 0$, pero solo el primer caso, con K *finito*, corresponde a un comportamiento caótico; el segundo caso, por el contrario, parece referirse a una completa aleatoriedad carente de toda regularidad subyacente. En otras palabras, el comportamiento caótico de un sistema implica la aleatoriedad algorítmica de su salida y su K-entropía positiva, pero la implicación inversa no es válida: puede darse el caso de sistemas con K-entropía positiva y cuya salida es algorítmicamente aleatoria, pero que no presentan un comportamiento caótico. Por lo tanto, la propuesta de Ford no es adecuada: la aleatoriedad algorítmica de la salida de un sistema no es condición necesaria y suficiente para la caoticidad de su comportamiento.

Una consecuencia del comportamiento caótico en el caso continuo es la superposición de dos efectos geométricos: contracción de las distancias en una dirección del espacio de las fases y dilatación en otra dirección. Supóngase una trayectoria α que se inicia en un punto:

- el conjunto de las trayectorias que divergen de α definen un subespacio en el cual toda distancia se dilata exponencialmente a través de la evolución según un exponente de Lyapounov $h_+ > 0$.
- el conjunto de las trayectorias que convergen a α definen un subespacio en el cual toda distancia se contrae exponencialmente a través de la evolución según un exponente de Lyapounov $h_- < 0$.

Batterman (1993, p. 49) sugiere que este tipo de estructura convergente/divergente es una condición necesaria para el caos. Esto es correcto en el caso continuo, donde no pueden existir trayectorias caóticas en espacios de las fases de dimensión inferior a tres[9]; también se cumple en el caso discreto de mapas de dos dimensiones

9 En los sistemas disipativos, sobre la base de la continuidad de las trayectorias en el espacio de las fases y de la condición de determinismo (que las trayectorias no puedan cortarse en ningún punto), el teorema de Poincaré-Bendixson demuestra la imposibilidad de comportamiento caótico en

como, por ejemplo, la transformación del panadero[10]. Pero, ¿cómo podría cumplirse el mecanismo de dilatación/contracción en evoluciones de una única variable? Considérese, por ejemplo, el caso de la muy conocida *ecuación logística*, $x_{n+1} = rx_n (1-x_n)$, que describe una evolución unidimensional que se torna caótica para valores del parámetro r superiores a un cierto valor crítico r_c (*cfr.* Argyris *et al.*, 1994, pp. 169-173); precisamente, para $r > r_c$ puede calcularse el exponente de Lyapounov $h > 0$. Dada la unidimensionalidad de la evolución, h es el único exponente de Lyapounov, e indica la divergencia exponencial de las trayectorias con el transcurso del tiempo: no existe un exponente de Lyapounov negativo que indique convergencia, pues no hay otra dimensión según la cual las trayectorias puedan converger. Esto muestra que la estructura convergente/divergente no se manifiesta en ecuaciones caóticas de una única variable; por lo tanto, la sugerencia de Batterman, si bien correcta para un amplio espectro de casos, no logra recoger todas las múltiples y variadas manifestaciones de los fenómenos caóticos.

Tal vez uno de los mayores inconvenientes para formular una definición precisa y unitaria de caos sea la diferencia entre sistemas conservativos y sistemas disipativos en cuanto al modo de manifestarse el comportamiento caótico. Una definición general de ambos tipos de sistemas puede formularse en términos de la geometría del espacio de las fases: sistemas conservativos son aquéllos que cumplen con el teorema de Liouville de conservación del volumen en el espacio de las fases ($d\rho/dt = 0$); por el contrario, sistemas disipativos son aquéllos para los cuales cualquier región del espacio de las fases disminuye su volumen a través de su evolución temporal ($d\rho/dt < 0$). En un sistema conservativo de comportamiento caótico, la dilatación debida a la divergencia exponencial de las trayectorias en ciertas direcciones ($h_i > 0$) debe compensarse exactamente con la contracción debida a la convergencia exponencial de las trayectorias en otras direcciones ($h_j < 0$), a fin de asegurar la conservación de volumen. En un sistema disipativo de comportamiento caótico, en cambio, la contracción debe superar la dilatación, resultando así una disminución neta del volumen de cualquier región del espacio de las fases a través de la evolución temporal. Por lo tanto, debe cumplirse, en valores absolutos:

- en los *sistemas conservativos*: la suma de los $h_i > 0$ debe ser igual a la suma de los $h_j < 0$.
- en los *sistemas disipativos*: la suma de los $h_i > 0$ debe ser menor que la suma de los $h_j < 0$.

un espacio de las fases de dos dimensiones: dado que las trayectorias caóticas divergentes no pueden quedar confinadas a una superficie, la dimensión de un atractor caótico debe ser mayor que dos. En sistemas conservativos, para que pueda darse un comportamiento caótico es necesario que existan al menos dos frecuencias fundamentales que definan un toro en un espacio de las fases de cuatro dimensiones.

10 La transformación del panadero es una transformación discreta en un espacio de las fases de dos variables, x e y, tales que $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq 1$, y queda definida por las siguientes ecuaciones: $x' = 2x$ e $y' = y/2$ para $0 \leq x < ½$; $x' = 2x - 1$ e $y' = (y + 1)/2$ para $½ \leq x \leq 1$. Dado su carácter caótico, pueden calcularse sus exponentes de Lyapounov $h_+ = \ln 2$ y $h_- = -\ln 2$.

Veamos, entonces, como se manifiesta el comportamiento caótico en ambos casos.

Sistemas disipativos

En los sistemas disipativos, cualquier región inicial del espacio de las fases evoluciona disminuyendo su volumen, de modo tal que el volumen tiende a cero cuando el tiempo tiende a infinito. Es así que adquiere una importancia central la noción de *atractor*: lugar geométrico del espacio de las fases hacia el cual convergen todas las trayectorias provenientes de una cierta región denominada "*cuenca de atracción*"[11]. En otras palabras, cualesquiera sean las condiciones iniciales del sistema, su evolución queda representada por una trayectoria que parte del punto representativo del estado inicial y tiende al atractor; ejemplo de ello es un péndulo amortiguado por rozamiento, donde el atractor puntual representa el estado final de reposo. Pero el *punto fijo* no es el único tipo posible de atractor; en el caso de un péndulo forzado a oscilar con una frecuencia impuesta, las trayectorias tienden hacia un *ciclo límite* en forma de elipse. Un atractor debe ser *no descomponible*, es decir, la trayectoria debe visitar todos los puntos del atractor a lo largo del tiempo: un conjunto de puntos fijos aislados no es un atractor único. Además, la dimensión del atractor debe ser inferior a la dimensión del espacio de las fases en el que se encuentra, pues su volumen es nulo en tal espacio (*cfr.* Schuster, 1989, pp. 93-94). Un sistema dado puede poseer varios atractores, cada uno con su propia cuenca de atracción; según la cuenca en la que se encuentre situado el punto representativo de las condiciones iniciales del sistema, la trayectoria convergerá a uno u otro atractor.

Pero en los sistemas disipativos de comportamiento caótico, los atractores no poseen la forma sencilla del punto fijo o del ciclo límite, objetos geométricos de dimensión entera; por el contrario, se trata de atractores denominados "*extraños*" o "*anómalos*", caracterizados por su dimensión fraccionaria[12]. Estos curiosos objetos geométricos son los que Benoit Mandelbrot (1987) denominó "*objetos fractales*", cuya característica central es la *autosimilitud*, esto es, la propiedad de conservar su aspecto cualquiera sea la escala con la cual se los observa. Los atractores caóticos o extraños ocupan una región finita del espacio de las fases, y solo pueden darse en espacios de las fases de dimensión superior a dos, pues las trayectorias divergentes

[11] En términos matemáticos, un *atractor* es un conjunto compacto A, con la propiedad de que existe una vecindad de A tal que, para casi toda condición inicial, el conjunto límite de la órbita para $t \rightarrow +\infty$ es A. Por lo tanto, casi toda trayectoria en una vecindad de A pasa arbitrariamente cerca de cada punto de A. La *cuenca de atracción* de A es el cierre del conjunto de condiciones iniciales que tienden a A. *Cfr.* Farmer, Ott y Yorke, 1983, p.153.

[12] Existen diversos tipos de dimensión de un objeto geométrico. La más conocida es la dimensión de Hausdorff D_H, que se calcula, en un espacio d-dimensional, cubriendo el objeto con esferas d-dimensionales de diámetro α. Farmer *et al.* (1983) analizan las distintas definiciones del concepto de dimensión en el contexto del estudio de los atractores anómalos.

no pueden quedar confinadas a una superficie cumpliendo, a la vez, las condiciones de continuidad y determinismo (teorema de Poincaré-Bendixson, *cfr.* nota 9). La estructura geométrica de estos atractores es extraordinariamente intrincada, pues se pliegan y se repliegan sobre sí mismos un número infinito de veces: si se examina uno de estos pliegues a una escala superior, se descubre una estructura semejante a la previa, de pliegue y repliegue, y así indefinidamente. Desde el punto de vista dinámico, esta complejísima estructura del atractor es lo que permite la divergencia exponencial de las trayectorias con una disminución de volumen de la región inicial en el espacio de las fases.

Esta caracterización del caos en sistemas disipativos parece brindar los elementos para formular una adecuada definición de comportamiento caótico válida, al menos, para este tipo de sistemas: una dinámica disipativa es caótica si es sensible a las condiciones iniciales y las trayectorias tienden a atractores extraños (o anómalos). Sin embargo, aun este caso, donde la definición parece surgir de un modo directo, no se encuentra exento de inconvenientes. Si bien en la bibliografía suele asimilarse el significado de "caótico" y de "extraño" (o "anómalo"), ambos términos no son sinónimos:

- *"extraño"* refiere a una propiedad *geométrica*: el atractor es un objeto fractal, con sus características de autosimilitud y dimensión fraccionaria.
- *"caótico"* refiere a una propiedad *dinámica*: en el atractor, las trayectorias divergen exponencialmente con el transcurso del tiempo.

¿Puede afirmarse, no obstante, que un atractor es caótico si es extraño? Lamentablemente la respuesta parece ser negativa: si bien se trata de situaciones no típicas, se han hallado casos de atractores extraños pero no caóticos (*cfr.* Grebogi *et. al.*, 1987, p. 632); por lo tanto, la estructura fractal del atractor no asegura la propiedad dinámica de divergencia exponencial de las trayectorias. En consecuencia, no es posible definir el comportamiento caótico en sistemas disipativos a través de ciertas propiedades geométricas de sus atractores; solo resta, entonces, la propiedad dinámica de divergencia exponencial de las trayectorias en el atractor.

Sistemas conservativos

Si en el caso de los sistemas disipativos la teoría del caos presenta una cierta complejidad técnica desde el punto de vista matemático, la complejidad aumenta considerablemente cuando la teoría se aplica a sistemas conservativos[13]. Dada la conservación del volumen en el espacio de las fases, en los sistemas conservativos no

13 Incluso los textos especializados dedican considerablemente menos espacio al caos en sistemas conservativos que en sistemas disipativos. El tema puede hallarse en Schuster (1989), capítulo 6, y en Argyris *et.al.* (1994), capítulo 4.

existen atractores; por lo tanto, la definición de caos debe acudir a otro tipo de elementos.

Los sistemas conservativos se dividen en dos subclases: los que son integrables y los que no lo son. Un sistema conservativo, cuya dinámica se representa en un espacio de las fases de $2N$ dimensiones, es integrable si sus trayectorias se encuentran confinadas en un toro de dimensión N. Una importante propiedad de los sistemas integrables es que, debido a tal confinamiento, las trayectorias solo pueden divergir linealmente con el tiempo; por lo tanto, cualquier intervalo que se adopte como condición inicial solo puede, a lo sumo, amplificarse linealmente. Como consecuencia, ningún sistema conservativo integrable puede manifestar un comportamiento caótico. A esto se refiere precisamente Batterman (1993, p. 62) cuando propone una razonable condición débil de adecuación para la definición de caos: ninguna definición adecuada de caos para sistemas conservativos puede permitir que un sistema conservativo integrable presente un comportamiento caótico. En este sentido, Batterman objeta la definición algorítmica de caos. Compárense dos "cajas negras": una de ellas contiene una ruleta a la que se impartes diferentes cantidades de movimiento angular a intervalos iguales; la otra contiene un gas ideal bajo el modelo de esferas rígidas. En ambos casos puede obtenerse una secuencia de salida de complejidad algorítmica máxima; sin embargo, mientras el segundo sistema es efectivamente caótico, el primero es un sistema conservativo integrable: la definición algorítmica de caos no permite diferenciar entre ambas situaciones.

Este argumento podría objetarse señalando que, si se considera como sistema la ruleta ideal más el agente que periódicamente la impulsa, el nuevo sistema no solo ya no es integrable, sino siquiera es conservativo: el teorema de Liouville no se cumple debido a la continua inyección de energía, produciéndose un progresivo aumento del volumen de cualquier región inicial del espacio de las fases con el transcurso del tiempo. Batterman se hace cargo de esta objeción afirmando que, en realidad, refuerza su propio argumento: "el movimiento hamiltoniano [esto es, conservativo] de la ruleta es estable; y, por tanto, *la aleatoriedad se debe a algo diferente de la dinámica*" (Batterman, 1993, p. 64). Según el autor, la aleatoriedad de la secuencia de salida se debe al modo dinámicamente artificial en que fue generada: se ignora la cantidad de movimiento angular que se imparte en cada instante. Otra situación en la que se daría tal tipo de artificialidad sería el caso en que se observara la salida de la ruleta en instantes aleatoriamente seleccionados: en ambos casos, la irregularidad de la salida es resultado de una aleatoriedad inyectada desde el exterior del sistema.

El caso de la ruleta es un ejemplo relevante, no solo en el contexto del particular argumento contra la definición algorítmica, sino respecto del problema general de la comprensión del concepto de caos; por ello, es conveniente detenerse en su análisis. En primer lugar debe advertirse que, no obstante la respuesta de Batterman a la objeción señalada, la ruleta periódicamente impulsada y la ruleta observada en instantes aleatorios son dos sistemas que no pueden asimilarse siquiera en el marco del argumento del autor. El segundo caso es un sistema conservativo integrable que genera una secuencia aleatoria debido al peculiar modo en que es observado: aquí es verdad que la aleatoriedad, inyectada desde fuera del sistema, se manifiesta en su salida como resultado del modo dinámicamente artificial de generarla; por lo tanto, se trata de un buen ejemplo para impugnar la definición algorítmica de caos. Por el contrario, el primer caso no es un sistema conservativo y, en consecuencia, no puede cumplir el papel argumentativo que le adjudica el autor: no muestra que la definición algorítmica de caos identifica como caótica la salida de un sistema conservativo integrable[14].

En segundo lugar, y dejando de lado ahora el problema particular de la definición algorítmica, es importante disipar las posibles confusiones que puede inducir la conclusión de Batterman: "si quisiéramos ver cómo una ruleta, *tratada como un sistema hamiltoniano que evoluciona de un modo continuo*, podría producir una salida algorítmicamente aleatoria, deberíamos introducir la aleatoriedad desde el exterior" (1993, p. 64). Si el autor se refiere a un sistema conservativo (hamiltoniano) *integrable*, que no puede presentar una dinámica caótica, entonces es correcto afirmar que una secuencia de salida aleatoria solo puede deberse a la introducción de la aleatoriedad desde el exterior del sistema. Pero si se interpreta la frase como refiriéndose a los sistemas conservativos en general, tal conclusión no es correcta: hay sistemas conservativos –precisamente, los no integrables– que pueden generar una secuencia de salida aleatoria debido exclusivamente a su propia dinámica caótica, sin interferencia de factores externos.

Podría replicarse que Batterman no se refiere a cualquier sistema hamiltoniano, sino al caso particular de la ruleta ideal –sin rozamiento–, esto es, tratada como sistema conservativo. Sin embargo, tal aclaración puede no resultar suficiente para evitar las confusiones del no especialista. Tómese, por ejemplo, el caso de una ruleta ideal acoplada a un campo conservativo; puede demostrarse que, para ciertos modos de dependencia del potencial de dicho campo respecto del ángulo de rotación, el sistema puede producir una salida caótica –identificada como tal con total independencia de la definición algorítmica de caos– sin intervención de elementos dinámicamente artificiales (*cfr.* Schuster, 1989, pp.166-167). Otro ejemplo de sistemas conservativos integrables que, debidamente acoplados, pueden dar lugar a un comportamiento caótico, es el caso de dos osciladores armónicos (por ejemplo, dos péndulos ideales) acoplados a través de un hamiltoniano no integrable (*cfr.* Schuster, 1989, pp. 149-151): la no integrabilidad del sistema total abre el camino a la posibilidad de un comportamiento caótico. Sin duda, no es a este tipo de casos a los que se refiere Batterman, sino a una ruleta ideal, sin rozamientos *ni acoplamientos*. No obstante, estos ejemplos muestran que, para evitar confusiones, no es suficiente describir un sistema de un modo tan general como "una ruleta, tratada como un sistema conservativo"; en toda discusión acerca de la caracterización del caos es indispensable definir con precisión la dinámica del sistema del que se habla. Pero, ¿cómo se

14 Es interesante señalar que una ruleta amortiguada (sistema no conservativo), periódicamente impulsada por una fuerza función del ángulo de giro, puede presentar comportamiento caótico. *Cfr.* Schuster (1989), pp.12-13.

define la dinámica de un sistema?; precisamente a través de las ecuaciones dinámicas que describen su comportamiento temporal. De este modo volvemos a una de las cuestiones epistemológicas tratadas en un apartado anterior: la Teoría del Caos es una teoría matemática acerca de las propiedades de las soluciones de cierto tipo de ecuaciones diferenciales (o en diferencias finitas) autónomas y no lineales. Por lo tanto, un gran número de las discusiones en torno a la definición de caos podrían dirimirse mucho más fácil y claramente si, en lugar de continuar refiriéndonos a "sistemas caóticos" –como lo hace, en particular, Batterman–, nos concentráramos en estudiar el carácter caótico de ecuaciones matemáticas.

Para concluir con el caso de las dinámicas conservativas, puede afirmarse que la no integrabilidad es una condición necesaria pero no suficiente para el comportamiento caótico de un sistema. Pero, ¿puede hallarse una condición suficiente? En la actualidad se cuenta con interesantes y precisos resultados acerca del modo y las condiciones en que un sistema conservativo no integrable pierde su estabilidad, pudiendo dar lugar a un comportamiento caótico (*cfr.* Schuster, 1989, pp. 141-148; Argyris *et. al.* 1994, pp. 94-110). Sin embargo, la demostración rigurosa del carácter caótico de la dinámica de un sistema conservativo es una tarea extremadamente compleja desde el punto de vista matemático; en efecto, esto solo se ha logrado en muy pocos y sencillos casos, como el de un círculo moviéndose según las leyes de la dinámica dentro de un rectángulo de paredes perfectamente reflectoras, o el de una partícula puntual en un receptáculo bidimensional en forma de estadio –demostraciones obtenidas por Sinaí en la década del ´70. La pregunta que surge de inmediato es: ¿qué característica del comportamiento de un sistema permite al investigador afirmar que se encuentra ente una dinámica caótica? La respuesta apunta, nuevamente, a la divergencia exponencial de las trayectorias en el espacio de las fases[15].

Conclusiones

En la discusión acerca de la definición de caos, se ha argumentado que las caracterizaciones basadas en la impredictibilidad o en una supuesta "discontinuidad" del comportamiento caótico no brindan una adecuada definición del concepto, la cual debe buscarse en las propiedades de las ecuaciones que describen una dinámica caótica. En este sentido, autonomía y no linealidad de las ecuaciones constituye una condición necesaria pero no suficiente para el caos. La búsqueda de condiciones suficientes nos enfrentó al problema de los muy diferentes modos en los que se manifiesta el comportamiento caótico:

> la posibilidad de caos en mapas unidimensionales excluye como condición necesaria la estructura convergente/divergente del flujo de trayectorias en el espacio de las fases.

[15] Se requiere que las ecuaciones posean puntos fijos hiperbólicos, en cuya vecindad el sistema se torna inestable.

- en dinámicas disipativas, el carácter fractal del atractor –propiedad geométrica– no es condición suficiente para asegurar su carácter caótico –propiedad dinámica.
- en dinámicas disipativas, la no integrabilidad de las ecuaciones constituye una condición necesaria más para el caos, pero no suficiente.

No obstante, en todos los casos parece no dudarse de la presencia de comportamiento caótico cuando las ecuaciones dinámicas, representadas mediante trayectorias en el espacio de las fases, presentan una divergencia exponencial, caracterizada por un exponente de Lyapounov positivo, según alguna dirección de tal espacio. La pregunta es, entonces, ¿por qué no considerar tal divergencia exponencial como condición suficiente para el caos? Sin duda, este carácter expansivo se detecta en las ecuaciones $x = f(r, t)$, soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales $dx/dt=F(x, r)$ cuya autonomía y no linealidad son condición necesaria pero no suficiente para el caos. Tal vez no pueda hallarse una propiedad *de las ecuaciones diferenciales* mismas que juegue el papel de condición suficiente; pero ésta es una cuestión matemática que no afecta el problema de la definición de caos, si tal definición puede darse sobre la base de la estructura *de las soluciones* del sistema de ecuaciones. Por lo tanto, la pregunta vuelve a presentarse: con independencia del modo particular en el que se manifiesta el caos –caso discreto o continuo, dinámica conservativa o disipativa–, ¿podría un sistema exhibir evoluciones temporales exponencialmente divergentes y, al mismo tiempo, su comportamiento no ser considerado caótico? Si la respuesta a esta pregunta es negativa, nada impide considerar el carácter "expansivo" de una dinámica como condición suficiente para su caoticidad. Dado que se trata de una teoría matemática, la respuesta final queda en manos de los matemáticos dedicados al estudio de la Teoría del Caos.

Referencias bibliográficas

Argyris, J., Faust, G. y Haase, M. *An Exploration of Chaos*. North-Holland, Amsterdam, 1994.

Batterman, R. W. "Defining Chaos". *Philosophy of Science*, vol. 60, Nº 1, 1993, pp. 43-66.

Brudno, A. A. "The Complexity of the Trajectories of a Dynamical System". *Russian Mathematical Surveys*, vol. 33, 1978, pp. 197-198.

Casati, G. "De los Billares al Caos de los Atomos". *Mundo Científico*, vol. 11, Nº 115, 1991, pp.7 56-762.

Chabert, J.L. y Dalmedico, A.D. "Henri Poincaré, el Precursor". *Mundo Científico*, Nº 115, vol. 11, julio-agosto, 1991, pp. 716-720.

Crutchfield, J.P., Farmer, J.D., Packard, N.H. y Shaw, R.S. "Caos". *Investigación y Ciencia*, Nº 125, febrero, 1987, pp. 16-29.

Davies, P. "Chaos Frees the Universe". *New Scientist*, vol. 128, Nº 1737, octubre, 1990, pp. 48-51.

Ditto, W.L. y Pecora, L.M. "Mastering Chaos". *Scientific American*, vol. 269, Nº 2, agosto, 1993, pp. 62-68.

Farmer, J. D. "Dimension, Fractal Measure and Chaotic Dynamics". En H. Haken (ed.), *Evolution of Order and Chaos*. Springer, New York, 1982.

Farmer, J. D., Ott, E. y Yorke, J. A. "The Dimension of Chaotic Attractors". *Physica*, vol.7D, 1983, pp. 153-180.

Ford, J. "How Random is a Coin Toss?" *Physics Today*, Nº 4, abril, 1983, pp. 40-47.

Ford, J. "What is Chaos, That We Should Be Mindful of It?". En Paul Davies (ed.), *The New Physics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

Gleick, J. *Chaos: Making a New Science*. Penguin Books, New York, 1988.

Grebogi, C., Ott, E. y Yorke, J. A. "Chaos, Strange Attractors and Fractal Basin Boundaries in Nonlinear Dynamics". *Science*, vol. 238, 1987, pp. 632-638.

Hunt, G. M. K. "Determinism, Predictability and Chaos". *Analysis*, vol. 47, Nº 3, 1987, pp. 129-133.

Lombardi, O. "La Teoría del Caos y el Problema del Determinismo". *Diálogos*, Nº 72, julio, 1998.

Mandelbrot, B. *Los Objetos Fractales*. Tusquets, Barcelona (1ª ed. 1977), 1987.

Neff, J. y Carroll, T. "Circuits that Get Chaos in Sync". *Scientific American*, vol. 269, Nº 2, agosto, 1993, pp. 101-103.

Piskunov, N. *Cálculo Diferencial e Integral*. Limusa, México, 1994.

Poincaré, H. *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Celeste*. Gauthier Villars, Paris, 1892.

Schuster, H. G. *Deterministic Chaos*. VCH, Weinheim, 1989.

Stone, M. "Chaos, Prediction and Laplacean Determinism". *American Philosophical Quarterly*, vol. 26, Nº 2, 1989, pp. 121-131.

Resumen / *Abstract*

El objetivo del presente trabajo es contribuir a la discusión epistemológica acerca de la Teoría del Caos. Nos concentramos en el problema de la definición de caos, argumentando que impredictibilidad y aleatoriedad algorítmica no constituyen una base satisfactoria para definir el caos. El análisis de las diferentes manifestaciones del caos nos permite considerar el problema de encontrar una definición de caos única y adecuada –una definición que brinde condiciones necesarias y suficientes válidas para todas los casos. Sostenemos que, dado el carácter matemático de la teoría, la definición debe extraerse a partir de las características de las ecuaciones caóticas.

The aim of this paper is to contribute to the epistemological discussion about the Theory of Chaos. We focus on the problem of the definition of chaos, arguing *that unpredictability and algorithmic randomness are not a satisfactory basis for defining chaos. The analysis of the different manifestations of chaos enable us to consider the problem of finding a single and adequate definition of chaos –a definition that provides necessary and sufficient conditions, valid for all cases. We argue that, given the mathematical character of the theory, the definition must be drawn from the features of the chaotic equations.*