Gerold Stahl

LA VERDAD DESDE EL PUNTO DE VISTA LOGICO-MATEMATICO*

EN UN TIEMPO en que tantas "verdades eternas" se ven contradichas, la verdad misma no puede escapar a un análisis científico, realizado, en este caso, en el marco de la lógica matemática o lógica simbólica. Como muchos otros trabajos científicos, también aquellos que versan sobre la verdad, tienen sus raíces en el pasado, pero constituyen al mismo tiempo una superación de las contribuciones precientíficas.

Dado el carácter general de esta conferencia, los aspectos puramente técnicos de la definición de "verdad" no se tratarán, y, dado su carácter científico, las consideraciones especulativas en torno a la verdad tampoco se tratarán. En la región límite entre lógica formal y teoría del conocimiento y no en la región límite entre metafísica y teoría del conocimiento está situado el presente análisis. Este excluye igualmente consideraciones psicológicas.

La lógica matemática se ocupa, por un lado, de un lenguaje formal y, por otro, de objetos denotados por ciertas expresiones del lenguaje formal. Estos objetos (tomando "objeto" en un sentido muy amplio) no son necesariamente reales (la realidad no es un problema de la lógica formal). Así, entre tales objetos pueden figurar, por ejemplo, $\sqrt{-1}$, el pegaso o la clase de los hombres.

Una parte de las expresiones del lenguaje formal son las frases; por ejemplo "La torre Eiffel está en París" y "La torre Eiffel está en Santiago". Las frases se clasifican habitualmente en dos clases, de modo que una frase del lenguaje pertenece a una sola de estas dos clases. Se habla de "lógica bivalente" si se aplica rigurosamente la convención de que cada frase pertenece o a una o a otra clase; y esto aunque en algunos casos, por falta de conocimientos, no podamos realizar efectivamente esta clasificación. Las frases de la primera clase se llaman "frases verdaderas", las de la segunda, "frases falsas".

Para establecer esta clasificación, es decir, para determinar en principio qué frase pertenece a qué clase, necesitamos una definición formal de "frase verdadera" y "frase falsa". Tal vez sean conocidas formulaciones como: "La nieve es blanca" es verdad, si, y sólo si, la nieve es blanca; "La torre Eiffel está en Santiago" es verdad, si, y sólo si, la torre Eiffel

*Conferencia dada el 27 de junio de 1966 en el Departamento de Extensión Universitaria de la Universidad de Chile.

está en Santiago, etc. Se puede dar un número tan grande como se quiera de estas definiciones parciales para un caso concreto; esto no constituye nunca una definición general de "frase verdadera".

Para dar una definición *general* se utilizará un procedimiento de Tarski, muy simplificado y un poco cambiado. En primer término hay que hacer una distinción entre frases primitivas y frases compuestas. Una frase primitiva es una combinación de una expresión individual como "la torre Eiffel" y de un predicado como "estar en París"; también hay frases primitivas constituidas por varias expresiones individuales y un predicado. Una frase compuesta se forma partiendo de una o varias frases primitivas, agregando en forma apropiada "no", "o", "y", "si... entonces", "todos", "por lo menos un", etc.

Se puede dar, ahora, una definición de "frase verdadera" y "frase falsa" en los puntos siguientes (únicamente las expresiones señaladas por estos puntos son verdaderas, respectivamente falsas):

1) Una frase primitiva es verdadera si el individuo de la expresión individual (la torre Eiffel) satisface la función correspondiente al predicado (si la torre Eiffel satisface la función *estar en París*). La frase es falsa si el individuo no satisface la función. Esto corresponde perfectamente a las definiciones parciales aquí señaladas (ejemplo, "La nieve es blanca"...). Análogamente se tratan frases primitivas con varias expresiones individuales.

2) Una frase precedida por la negación es verdadera si la frase sin negación es falsa. Ella es falsa en el caso contrario.

De un modo análogo se formulan reglas para "o", es decir, para la disyunción, y para "todos", es decir, para el operador universal.

Debido a que se pueden formar todas las frases compuestas partiendo de frases primitivas y utilizando la negación, la disyunción y el operador universal, la definición indicada, que es absolutamente rigurosa, abarca todas las frases del lenguaje formal.

Sin embargo, se presenta de inmediato un problema que exige mayor precisión. Se pueden hacer *diversas* clasificaciones en frases verdaderas y falsas. Por ejemplo, para la aritmética habitual "$2 + 2 = 4$" es una frase verdadera y con todo otro valor en lugar de 4 se obtiene una frase falsa. Respecto a un álgebra de Boole, en cambio, "$2 + 2 = 2$" es una frase verdadera, y, para un álgebra módulo 3, "$2 + 2 = 1$" es verdad. Lo que hay que hacer entonces es precisar respecto a qué las frases son verdaderas o falsas.

Para esto tenemos que referirnos a los k-tuplos ordenados, o sea a secuencias de k miembros (k objetos puestos en fila, uno en el primer lugar, uno en el segundo lugar, ..., uno en el k-ésimo lugar). Los k-tuplos ordenados se representan simbólicamente por "$< \ldots, \ldots, \ldots >$", colocándose en los lugares correspondientes los símbolos de los objetos correspondientes. Consideremos aquellos k-tuplos que tengan en el primer lugar una clase de individuos *(ind)*, como la torre Eiffel, la nieve, etc., y después funciones proposicionales, como *estar en París;* o sea, $<$*ind*, ..., ...$>$ con símbolos de funciones proposicionales en lugar de los puntos suspensivos. Algunos de los k-tuplos recién mencionados tienen una relación especial con un lenguaje formal y se llaman por eso "realizaciones posibles" del lenguaje correspondiente. Depende de la estructura del lenguaje, cuáles son sus realizaciones posibles. Si se especifica además, por convención, cierto número de condiciones que deben satisfacer los individuos y funciones de una realización posible, entonces la realización posible con estas condiciones será llamada "k-tuplo relacional". En un tratamiento riguroso, todas las álgebras y muchas otras estructuras científicas constituyen k-tuplos relacionales. Respecto a estos k-tuplos hay que definir "frase verdadera" y "frase falsa". Entonces "$2 + 2 = 4$" es verdad respecto a la aritmética habitual, que constituye, en términos de k-tuplos relacionales, un álgebra llamada "cuerpo"; "$2 + 2 = 2$" es verdad respecto a un álgebra de Boole; etc.

Así tenemos una relativización de la verdad respecto a los k-tuplos relacionales. Pero no hay que ver algo negativo en esto. Si conociéramos la realidad podríamos decir que "$2 + 2 = 4$" es verdad respecto a la realidad, *si tuviéramos* $2 + 2 = 4$ *en realidad.* ¿Pero $2 + 2 = 4$ en realidad? ¿O *2*? ¿O *1*? No podemos responder a estas preguntas; pero podemos responder frecuentemente si se trata de un k-tuplo relacional que corresponde a una ciencia.

La relativización no debe ser entendida en el sentido de que todo resulta vago e impreciso, o que todo depende de las preferencias personales. Al contrario, sabemos absolutamente que, para un cuerpo, "$2 + 2 = 4$" es verdad y, para un álgebra de Boole, "$2 + 2 = 2$". Se trata aquí, por decirlo así, de una relatividad objetiva que depende del k-tuplo y no de las personas o de las convicciones. Algo análogo pasa, por ejemplo, con la teoría especial de la relatividad, donde todo depende de la velocidad entre los objetos.

Los sistemas formales, especialmente las matemáticas, son como los instrumentos de un cirujano. Cuando el cirujano efectúa una operación, elige el instrumento más adecuado. Exactamente lo mismo hace el físico cuando necesita una teoría formal o parcialmente formalizada para resolver sus problemas.

Con todo esto volvamos ahora a la definición de "verdad". En el fondo, ella puede parecer bastante trivial. Una parte de esta apariencia injustificada se debe a la simplificación adoptada en esta conferencia. La auténtica definición de Tarski es mucho más técnica. Ella es extraordinariamente fructífera, lo que siempre constituye un criterio de no-trivialidad. Por ejemplo, la teoría de los modelos y algunos otros sectores de la matemática actual se han beneficiado largamente con el tratamiento tarskiano de la verdad. Otra parte de la trivialidad aparente se debe a cierta semejanza con algunas definiciones clásicas.

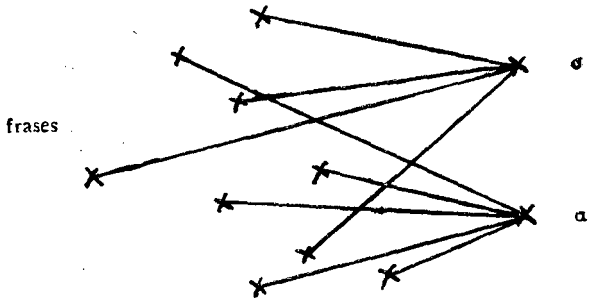
Para apreciar esta semejanza, se puede considerar en primer lugar una definición de Aristóteles, que es la más cercana: *Decir de algo que es que no es, o de algo que no es que es, es falso; mientras que decir de algo que es que es, o de algo que no es que no es, es verdad.* La diferencia fundamental no está en la concepción de la verdad, sino en el hecho de que la nueva definición es detallada y precisa hasta el último punto. Ella es rigurosamente formalizable, lo que no se puede decir de la definición de Aristóteles. Hay que tener presente que ninguna precisión en esta materia es excesiva, ya que de otro modo pueden obtenerse paradojas del tipo del "Mentiroso".

Consideremos ahora otra definición clásica, la de la "adaequatio rei et intellectus".

El término "intellectus" se utiliza frecuentemente en un sentido psicológico. Se establece la adecuación con actos o contenidos psíquicos. Sin embargo, la lógica matemática prescinde totalmente de las consideraciones psicológicas, que, en este caso, son puramente especulativas o pueden variar de un individuo a otro. En lugar de referirse al *intellectus,* ella toma como punto de partida las expresiones, las que para ella son secuencias de signos tipográficos ("n", "i", "e", "v", "e"), es decir, algo concreto y accesible a todo el mundo.

El término "res", que se traduce literalmente por "cosa", debe ser entendido como "situación", o "estado de cosas", o algo similar.

El verdadero problema de esta concepción clásica no es ni el *intellectus* ni la *res,* sino la adecuación. Normalmente la adecuación no es identidad. ¿Puede ser similitud? ¿Pero de qué modo? Naturalmente ella puede ser una correspondencia. Pero hay muchas correspondencias entre expresiones y no-expresiones; por ejemplo, debido a una técnica especial de Goedel, se puede establecer una correspondencia entre expre-



En algunos textos de lógica matemática σ y α se llaman "valores veritativos", σ sería el valor veritativo *verdad* y α, el valor veritativo *falsedad.* Para no producir confusiones con algunos otros términos utilizados, se prefiere hablar aquí simplemente de σ y α.

Todo lo anterior, al igual que la definición de "verdad", nos ha servido para dar un sentido claro y preciso a un término originalmente muy vago, el de "adecuación".

Hasta el momento se han visto sólo frases. Pero también hay otro tipo interesante de expresiones, como "$x = x$" o "x es el padre de y", etc. Este tipo de expresiones se llama "esquemas", con uno o varios símbolos de variables ("x", "y"). Un modo de transformar un esquema en una frase es substituir (colocar), en lugar de los símbolos de todas las variables, símbolos de constantes del k-tuplo relacional correspondiente. Tengamos, por ejemplo, como individuos del k-tuplo personas de una familia, entre ellos Carlos y María; al substituir "Carlos" en lugar de "x" y "María" en lugar de "y", se obtienen frases como "Carlos = Carlos" y "Carlos es el padre de María". Si un esquema se transforma en frase verdadera en todas las substituciones, según el k-tuplo relacional, entonces se llama "expresión siempre verdadera" o "expresión válida" respecto al k-tuplo dado. De modo análogo existen expresiones a veces verdaderas y a veces falsas y también expresiones siempre falsas respecto al k-tuplo.

Hasta el momento se han visto expresiones que son verdaderas o válidas respecto a un k-tuplo dado. Pero se puede demostrar que hay también expresiones que son verdaderas o válidas respecto a todos los k-tuplos, las que se llaman "expresiones lógicamente verdaderas (válidas)"; por ejemplo, "Si la torre Eiffel está en París, entonces la torre Eiffel está en París" y "$x = x$". Ya Leibniz las había considerado al hablar de verdades de razón, que rigen para todos los mundos posibles.

Actualmente no se habla de mundos posibles, sino en su lugar, de k-tuplos relacionales.

Se podría pensar que con estas expresiones tenemos verdades (expresiones válidas) independientes de los k-tuplos y, por lo tanto, absolutas. Desgraciadamente no es así. Aunque son totalmente independientes de los k-tuplos, hay todavía otras relativizaciones, de las cuales todavía no se ha hablado.

Primera relativización adicional: Hasta el momento hemos trabajado con sistemas lógicos sin especificarlos. Pero todas las expresiones lógicamente verdaderas (válidas) dependen del sistema elegido. No hay sistema absoluto y universal. Prácticamente se trabaja siempre con un sistema, llamado "sistema funcional superior", o con una parte de él, el sistema funcional básico. Pero se trata aquí de una preferencia por razones prácticas, debido a que este sistema, utilizado junto con los k-tuplos, corresponde a nuestras experiencias. En principio se podrían formar sistemas lógicos cuyas expresiones lógicamente verdaderas (válidas) sean las negaciones de aquellas de los sistemas usuales.

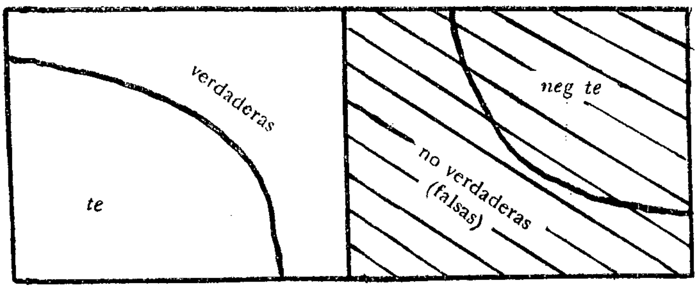
Segunda relativización adicional: Las reglas de la definición de "verdad" han sido elegidas convencionalmente. Para dar un ejemplo, se podría decir que una frase es verdadera si ella comienza con una vocal y falsa si comienza con una consonante. Naturalmente no se van a elegir definiciones de este tipo. La exigencia formulada normalmente frente a las definiciones de "verdad", es que ellas sean definiciones *adecuadas*. Es posible definir precisamente lo que es a su vez una definición adecuada de "verdad". Se formulará aquí esta exigencia de un modo un poco simplificado: Una definición de "verdad" es adecuada, si, y sólo si, podemos deducir de la definición todas las expresiones correspondientes de la forma "s es verdad, si, y sólo si p", donde en lugar de "p" se sustituye una frase y en lugar de "s" una expresión que denota la frase. Para dar un ejemplo, p corresponde a: La nieve es blanca; s corresponde a: "La nieve es blanca" (frecuentemente se utiliza, para denotar una expresión, la misma expresión puesta entre comillas).

La definición de "verdad" que se introdujo al principio de la conferencia, es adecuada, como se puede ver, porque podemos deducir de ella todas las expresiones de la forma: "La nieve es blanca" es verdad, si, y sólo si, la nieve es blanca.

Habiendo hablado tanto de relativizaciones, uno podría pensar que ya no queda nada estable. Sin embargo, si trabajamos con k-tuplos relacionales que corresponden a una ciencia rigurosa apoyada directa o indirectamente en la experiencia y si utilizamos el sistema funcional básico o superior y una definición adecuada de "verdad", entonces todo es fijo y estable. Naturalmente esta estabilidad se debe a que hemos hecho nuestra elección de los *k*-tuplos, del sistema lógico y del tipo de definiciones de "verdad".

En conexión con lo anterior hay que decir algunas palabras sobre la relación entre las expresiones verdaderas y válidas, por un lado, y los teoremas, por otro. Las primeras han sido introducidas por definiciones del tipo indicado; los segundos se demuestran a partir de axiomas y utilizando reglas axiomáticas, según los criterios generales para *sistemas* (que no son más que los conjuntos, o sea colecciones, de los teoremas respectivos). En lo que sigue se utilizará el término "expresión válida" no sólo para los esquemas válidos, sino también para las frases verdaderas, que constituyen, en el fondo, un caso especial de las expresiones válidas.

Al leer, por ejemplo, los "Principia Mathematica" de Russell y Whitehead, se nota que los dos autores han identificado, de hecho, las expresiones válidas con los teoremas. Era la tendencia natural de su época, y sólo unos veinte años más tarde Goedel demostró que no pueden coincidir, si los sistemas tienen cierta extensión. Es decir, el conjunto de los teoremas es o más amplio o más estrecho que el conjunto de las expresiones válidas. Se prefiere trabajar entonces, en cada caso, con un sistema más estrecho que el conjunto de las expresiones válidas; de este modo por lo menos todos los teoremas son válidos. Una representación gráfica de esta situación, pero sólo para las frases, sería:



Tomando más axiomas se obtienen más teoremas *(te)* y también más negaciones de teoremas *(neg te)*; pero Goedel demostró justamente que este proceso no llega nunca a un fin. Se pueden agregar indefinidamente axiomas y, sin embargo, quedan siempre frases verdaderas que no son teoremas, o el conjunto de las frases que son teoremas sobrepasa el conjunto de las frases verdaderas. Lo análogo rige también para los esquemas válidos y los esquemas que son teoremas. Así, una identificación de los sistemas, por un lado, con los conjuntos de las expresiones válidas, por otro, no es posible (para lograrla habría que cambiar la definición de "sistema", utilizando los llamados "semisistemas", o, la definición de "expresión válida", utilizando en su lugar las llamadas "expresiones secundariamente válidas"). Pero esto no significa que hemos llegado al fin de la matemática rigurosa, como se puede leer a veces; significa sólo que la lógica y la matemática disponen de dos técnicas para establecer expresiones de preferencia (las válidas y los teoremas), y que los conjuntos formados mediante estas dos técnicas son siempre diferentes.

Existen textos de filosofía especulativa sobre la verdad, en que todas las dificultades están definitivamente resueltas, todos los adversarios han sido refutados y todo está puesto perfectamente en su lugar. No hay sólo un trabajo de este tipo sobre la verdad sino muchos, y todos son igualmente definitivos. Desgraciadamente ninguno de estos textos coincide con otro. Ahí está la gloria y la miseria de la filosofía especulativa.

Lo que se ha señalado aquí no pretende tener el mismo grado de perfección; pero representa lo que se puede decir actualmente al apoyarse en los procedimientos científicos.

BIBLIOGRAFIA

CARNAP, R., *Introduction to Semantics,* Cambridge, Mass., 1942.

STAHL, G., *Linguistic Structures Isomorphic to Objet Structures,* Philosophy and Phenomenological Research, Filadelfia, 1964, Vol. 24, Nº 3, pp. 339-344.

——*Elementos de la metalógica y metamatemática,* Santiago, 1964.

TARSKI, A., *Logic, Semantics, Metamathematics,* Oxford, 1956.