Dr. Gerold Stahl

ASPECTOS FORMALES DE ALGUNAS PARADOJAS SEMANTICAS

SIGUIENDO a Ramsey dividimos las paradojas en lógicas y semánticas; las primeras, como por ejemplo la paradoja del católago de los catálogos que no se contienen a sí mismos, se resuelven según la teoría simplificada de los tipos, mientras que las últimas se resuelven según la teoría de los niveles del lenguaje que exige (por lo menos para conceptos semánticos como "verdad") que las afirmaciones sobre un lenguaje sean de un nivel más alto que el lenguaje al que hacen referencia.

En lo que sigue se intentará dar en los puntos esenciales una formalización a las paradojas semánticas y a sus eliminaciones. De la variedad de paradojas semánticas y de sus diversas formulaciones nos limitaremos en esta exposición a la paradoja del mentiroso en la forma russelliana, a la paradoja de Berry (con las formulaciones análogas de Koenig y Richard) y a la paradoja de Grelling (con la formulación análoga del catálogo de los catálogos que no se *mencionan* a sí mismos).

La paradoja del mentiroso se puede presentar con la frase siguiente:

Esta frase es falsa.

Si esta frase es verdadera, es falsa y por lo tanto (afirmándose lo contrario) verdadera y por eso falsa, etc. Si es falsa debe valer lo contrario, es decir, debe ser verdadera y luego falsa, etc.

Esta paradoja se resuelve fácilmente indicando que en la frase señalada se presenta una mezcla de niveles del lenguaje. Ella dice algo sobre sí misma, lo cual, según la teoría de los niveles del lenguaje, hace que ella no esté bien formada (significativa).

Sin embargo, es de interés no contentarse con este resultado rápido sino entrar un poco en los detalles. La frase señalada podría considerarse, según propone Russell (aunque en otro sentido), como un conjunto de frases —que estarían todas bien formadas— de la forma:

(1) La frase de primer nivel formulada aquí es falsa.
(2) La frase de segundo nivel formulada aquí es falsa.
(3) La frase de tercer nivel formulada aquí es falsa.
Etc. *

* También podríamos trabajar con niveles relativos: La frase de nivel $r+1$ . . . La frase de nivel $r+2$ . . . Etc.

Introducimos, aparte de los símbolos corrientes de la lógica, los siguientes símbolos especiales: "V_1" para "la clase de las frases verdaderas de primer nivel", "F_1" para "la clase de las frases falsas de primer nivel *, "V_2" para "la clase de las frases verdaderas de segundo nivel", "F_2" para "la clase de las frases falsas de segundo nivel", "V_3", etc., y además "s_1" para "la frase de primer nivel formulada aquí". Emplearemos comillas en las expresiones simbólicas en el sentido usual para referirnos a simbolizaciones.

(1) se formularía luego simbólicamente del siguiente modo:

$$s_1 \in F_1$$

Introducimos ahora "s_2" para denotar la frase anterior y obtenemos así la siguiente formulación simbólica de (2):

Introduciendo "s_3" tal que denote la frase anterior, tenemos para (3):

etc. De este modo, tenemos una simbolización para todas las frases del conjunto

Investigándolas una por una obtenemos para (1):

$$\sim E!(\imath x)\ (x = s_1)$$

es decir, no existe la frase de primer nivel formulada aquí, pues (1) ya es una frase de segundo nivel (ella está en metalenguaje). Por lo tanto no es el caso que s_1 pertenece a F_1 (o a alguna otra clase), lo que expresamos por:

$$\sim [s_1 \in F_1]$$

En el nivel más alto siguiente tenemos luego:

$$\text{“}s_1 \in F_1\text{”} \in F_2$$

es decir:

$$s_2 \in F_2$$

* Esto es, para "la intersección de $-V_1$ con la clase de frases de primer nivel".

y en el nivel siguiente:

$$``s_2 \in F_2" \in V_3$$

es decir:

$$s_3 \in V_3$$

o:

$$\sim (s_3 \in F_3)$$

y en el nivel siguiente:

$$``s_3 \in F_3" \in F_4$$

es decir:

$$s_4 \in F_4$$

etc. Se notará que las frases s que pertenecen a niveles pares (simbolizadas con subíndices pares) son siempre elementos de la clase F correspondiente y las frases s que pertenecen a niveles impares (simbolizadas con subíndices impares) son, *si existen,* siempre elementos de la clase V correspondiente. Esto se puede expresar en general para $n > O$:

$$s_{2n} \in F_{2n}$$

$$s_{2n+1} \in V_{2n+1}$$

Podríamos expresar en una sola fórmula lo que nos conduce a afirmar, por ejemplo: $``s_5 \in V_5"$:

$$`` `` `` ``s_1 \in F_1" \in F_2" \in V_3" \in F_4" \in V_5$$

o escribiendo paréntesis en lugar de comillas:

$$((((s_1 \in F_1) \in F_2) \in V_3) \in F_4) \in V_5$$

Podemos seguir así y obtendremos la expresıon correspondiente para cualquier nivel más alto; pero ya en la expresión señalada se nota el paralelismo con la paradoja en su formulación en idioma común. Sin embargo —y aquí está la diferencia—, la expresión simbólica señalada no tiene nada de paradojal.

La paradoja de Berry, que es una simplificación de la paradoja de Richard, se presenta de la manera siguiente: Supongamos que tenemos un diccionario del idioma castellano que incluye entre otras todas las palabras usadas en este artículo. De las palabras contenidas en él formamos expresiones que definen símbolos de números naturales *. Si agregamos la condición de que estas expresiones deben consistir en menos de 50 palabras, podemos formar sólo un número finito de expresiones. Llamamos *"d"* la clase de números naturales para los cuales pueden darse tales definiciones. Debido a que hay infinitos números naturales, debe haber números naturales que no pertenecen a *d*, es decir, debe haber números naturales cuyos símbolos pueden definirse únicamente por expresiones que consisten de 50 o más palabras del diccionario. Entre estos números hay uno que es el más pequeño y que simbolizamos por *"N"*. Tenemos entonces:

"N" es definido por "el número natural más pequeño cuyo símbolo ** no se puede definir por una expresión de menos de cincuenta palabras tomadas del diccionario".

El *definiens* consiste en este caso en 22 palabras del diccionario y *N* pertenece a *d*, mientras que por el otro lado no pertenece a *d*.

Tal como se presenta la paradoja, el diccionario no fija unívocamente un lenguaje en el sentido lógico. Podemos definir símbolos de números en el lenguaje primario del diccionario, es decir, empleando en el *definiens* palabras del diccionario sin hablar *sobre* este lenguaje (sobre expresiones o símbolos de este lenguaje). Simbolizamos por "d_1" la clase de los números naturales cuyos símbolos pueden definirse de este modo por una expresión que consiste en menos de 50 palabras del diccionario. También pueden definirse símbolos de números formulando el *definiens* en metalenguaje ***, y se puede cumplir con la

* En las definiciones aquí señaladas se definen siempre *expresiones*. Frecuentemente se habla de "definir" números, clases, etc. En interés de una terminología precisa sería mejor suplir "expresión de" o "símbolo de" o (según el caso) emplear otro término como por ejemplo, "determinar" o "aislar".

** Para simplificar convenimos que a cada número natural en cuestión corresponda un solo símbolo (podría serlo, por ejemplo, el símbolo cuyo *definiens* es el más corto).

*** En este caso se habla en el *definiens* *sobre* un lenguaje (una expresión, un símbolo). Ejemplo: *"5"* es definido por "la mitad del número denotado en la numeración romana por la letra "X" ".

misma condición de emplear menos de 50 palabras del diccionario. Llamamos "d_2" la clase de los números naturales respectivos. Lo análogo puede hacerse en un lenguaje de tercer orden. simbolizando la clase respectiva por "d_3", etc.

Simbolizamos, además, por "D_1" la clase de expresiones (que están en lenguaje primario) que definen los símbolos de los números de d_1, por "D_2" la clase de expresiones (en metalenguaje) que definen los símbolos de los números de d_2, etc.

Introducimos además "$Ds'a$" para expresar "el *definiens* de la expresión a" y "(μx) (Fx)" (el "operador mi") para expresar "el número natural más pequeño x que satisface F" (suponiendo que el universo del discurso contiene números naturales).

Definimos ahora:

$$N_2 =_{df} (\mu x) \; (Ds'\text{“}x\text{”} \in -D_1)$$

es decir, N_2 es el número natural más pequeño denotado por un símbolo cuyo *definiens* no pertenece a D_1. Según esta definición N_2 no pertenece a d_1, pero, si empleamos las traducciones señaladas, $Ds'\text{“}N_2\text{”}$ pertenece a D_2 y por lo tanto N_2 a d_2. La contradicción ya no se presenta.

En general podemos definir:

$$N_{n+1} =_{df} (\mu x) \; (Ds'\text{“}x\text{”} \in -D_n)$$

donde N_{n+1} no pertenece a d_n, pero sí a d_{n+1}.

N_2 no existe ("N_2" no es definible) para un sistema que está desarrollado únicamente en el lenguaje primario del diccionario; es imposible identificarlo con un número natural. Lo análogo ocurre con los demás N. Para un sistema desarrollado en un lenguaje de nivel n (con n niveles) existen los números $N_2, N_3, \ldots, N_n$ (pero no más allá). Comparándolos, notaríamos que $N_2 < N_3 < \ldots < N_n$.

Si "(μx) (Fx)" se traduce por "el elemento minimal x de la clase bien ordenada F", "d_n" por "la clase de los números *reales* cuyos símbolos pueden definirse por una expresión de nivel n que consiste de un número finito de palabras contenidas en el diccionario" y análogamente "D_n", y si limitamos el universo del discurso a los números reales, entonces lo señalado con respecto a la paradoja de Berry se aplica automáticamente a la *paradoja de Koenig*.

Ella puede exponerse así: Hay números reales cuyos símbolos no pueden definirse por expresiones que consisten en un número finito de palabras del diccionario. Estos números pueden ser bien ordenados. El elemento minimal de la clase bien ordenada obtenida así sea N. Todo esto permitiría definir "N" por un número finito de palabras del diccionario ("el elemento minimal . . . "), mientras que por el otro lado pertenece a la clase de los números para los cuales no hay un *definiens* que consista en un número finito de palabras del diccionario.

Una tercera formulación de la misma paradoja se presenta si los símbolos se traducen como en el caso anterior, se adscribe biunívocamente a cada elemento de D_n una expresión f (una fracción decimal infinita) y si se substituye en las fórmulas de la paradoja de Berry "E_n" en lugar de "$-D_n$" *. "E_n" denota una clase que contiene únicamente un *definiens* (del símbolo de un número real) de nivel n, diferenciado de los elementos de D_n por corresponderle biunívocamente una (nueva) expresión f que difiere (*de un modo determinado* siempre en una cifra) de cada expresión f de los elementos de D_n. Tomando en cuenta que E_n es una subclase de $-D_n$, se entiende por qué se conserva la analogía. Los números N_{n+1} son ahora números diagonales con respecto a las clases d_n. Tenemos de este modo una explicación formal de la *paradoja* original *de Richard.*

La formulación de esta paradoja en idioma común es: Podemos enumerar los elementos de d **. Si definimos ahora según el método de Cantor el símbolo de un número diagonal con respecto a d (con respecto a las expresiones f correspondientes), entonces este símbolo ha sido definido por un número finito de palabras. El número respectivo pertenece por eso a d, mientras que por el otro lado, siendo número diagonal con respecto a d, no pertenece a d.

La paradoja de Grelling puede exponerse de este modo: Llamamos "autológicos" a predicados (adjetivos) que se aplican a sí mismos (que poseen la propiedad que denotan) como "corto" (que es corto), "polisilábico" (que es polisilábico), etc., y llamamos "heterológicos" a predicados que no se aplican a sí mismos como "largo", "monosilábico" etc. La paradoja se presenta con el predicado "heterológico" mismo. Si este predicado es heterológico, entonces (según definición) es autológico, y si es autológico, entonces (según definición) es heterológico.

Tenemos una paradoja *lógica* análoga de Russell —todo esto se señala sólo para permitir una comparación con la paradoja de Grelling—

* Es indiferente escribir "μ" o "℩", ya que E_n tiene un solo elemento.

** d tiene aquí un número finito de elementos, pero esta paradoja y su explicación no cambiarían, en principio, si d tuviese la magnitud de alef cero.

en que se distingue entre propiedades llamadas "predicables" que poseen ellas mismas esta propiedad como imaginable (que es imaginable) y propiedades llamadas "impredicables" que no poseen ellas mismas esta propiedad, como verde (como la propiedad de ser verde). Formalmente se introduce "la clase de las propiedades impredicables" ("*imp*") por la siguiente definición:

$$imp =_{df} \lambda F(F \sim\in F)$$

es decir, "*imp*" es definido por "la clase de propiedades que no son elementos de sí mismas (que no son poseídas por sí mismas)". La paradoja resultante ($imp \in imp \equiv imp \sim\in imp$) se elimina según la teoría de los tipos (que no considera bien formadas expresiones como "$F \sim\in F$" o las que contienen "$\lambda F(F \sim\in F)$").

La paradoja de Grelling es más compleja. Para formalizarla usamos expresiones como "s_n" para denotar clases de nivel n donde $n \geqslant 0$, por ejemplo, $corto_0$ es la clase de las cosas cortas, $corto_1$ es la clase de las palabras cortas, $corto_2$ es la clase de las metapalabras cortas, etc. "$Cm'a$" se traduce por "la expresión * con que se denota a empleando comillas" (ejemplo: "*corto*" es $Cm'corto$), "$Mc'a$" simboliza la relación inversa (ejemplo: *corto* es Mc'"*corto*") y, finalmente, "^{x}" expresa "la palabra en el nivel más alto siguiente".

Con respecto a este último concepto, se presenta el problema de que en un lenguaje con distinción de niveles no hay nada en común entre "$corto_0$", "$corto_1$", "$corto_2$", etc., y de que, para definirlo, habría que referirse a un lenguaje sin distinción de niveles. Sin embargo, en la formalización de la paradoja se prescinde de este concepto. Se lo ha señalado sólo para poder tratar con amplitud ciertos aspectos paradojales íntimamente ligados a la paradoja de Grelling. Lo empleamos porque a partir de "$Cm's_n$" puede definirse con ayuda de este concepto "$Cm's_{n+1}$":

$$Cm's_{n+1} =_{df} (Cm's_n)^x \qquad (1)$$

y a partir de esta definición, obtenemos la igualdad:

$$s_{n+1} = Mc'((Cm's_n)^x) \qquad (2)$$

* Para simplificar convenimos en que haya una sola expresión correspondiente (podría serlo la primera, según algún ordenamiento).

Para tratar la paradoja propiamente tal definimos ahora:

$$het =_{df} \lambda Cm's(Cm's \sim\epsilon\ s) \qquad (3)$$

es decir, "la clase de los predicados heterológicos" es definido por "la clase de predicados (expresiones que denotan clase) que no son elementos de la clase respectiva". Esta definición sin subíndices es el punto de partida de la paradoja de que:

$$\text{"}het\text{"}\ \epsilon\ het \equiv \text{"}het\text{"} \sim\epsilon\ het \qquad (4)$$

La definición (3) peca contra la teoría de los niveles de lenguaje, pues para clasificar palabras (*Cm's*) tenemos que emplear el metalenguaje respectivo (tenemos que relacionarlas con clases *de palabras*), mientras que en esta definición se las clasifica con respecto a una clase de nivel más bajo (*de cosas*).

Una definición de *"het"* que cumple con las exigencias de la teoría de los niveles del lenguaje, sería:

$$het_{n+1} =_{df} \lambda Cm's_n(Cm's_n \sim\epsilon\ s_{n+1}) \qquad (5)$$

es decir, "la clase de los predicados heterológicos de nivel $n + 1$" es definido por "la clase de expresiones que denotan clases de nivel n, donde estas expresiones no son elementos de la clase respectiva de nivel $n + 1$". Por ejemplo, el predicado "$verde_0$" que denota la clase de las cosas verdes, no es elemento de la clase de las palabras verdes (de $verde_1$) y, por lo tanto, es elemento de het_1.

A pesar de esta formulación cuidadosa con distinción de niveles, obtenemos según definición (5):

$$\text{"}het_n\text{"}\ \epsilon\ het_{n+1} \equiv \text{"}het_n\text{"} \sim\epsilon\ het_{n+1} \qquad (6)$$

para un número natural n cualquiera. Esta expresión tiene el mismo aspecto paradojal que (4).

Sin embargo, (6) se debe al simple hecho de que la definición general (5) no es lícita. Considerémosla, por ejemplo, para dos casos específicos "het_1" y "het_2":

$$het_1 =_{df} \lambda Cm's_0(Cm's_0 \sim\epsilon\ s_1) \qquad (7)$$
$$het_2 =_{df} \lambda Cm's_1(Cm's_1 \sim\epsilon\ s_2) \qquad (8)$$

Sin embargo, por definición (7), "het_2" ya nos está dado según (2) (que necesitamos para poder formular definición (5)):

$$het_2 = Mc'((Cm'het_1)^{\text{x}}) \qquad (9)$$

de modo que (8), y (5) en general, que definen conceptos ya definidos, son ilícitas.

Con un pequeño cambio podemos hacer lícitas estas definiciones. Para esto tomamos en cuenta no sólo el nivel de la clase denotada por "*het*", sino también el nivel para el cual "*het*" ha sido introducido en el sentido de la definición (5). Escribimos así "$het\ r_n$", donde el subíndice "n" indica como antes el nivel de la clase denotada por "$het\ r_n$", mientras que el índice "r" (r también es un número natural) indica el nivel para el cual "$het\ r_n$" ha sido introducido en analogía con (5), y definimos:

$$het\ n + 1_{n+1} =_{df} \lambda Cm's_n(Cm's_n \sim\epsilon\ s_{n+1}) \qquad (10)$$

Tenemos en analogía a (6), por ejemplo:

$$\text{"}het\ 1_1\text{"} \ \epsilon\ het\ 2_2 \equiv \text{"}het\ 1_1\text{"} \sim\epsilon\ het\ 1_2 \qquad (11)$$

y en general (para $n > 0$):

$$\text{"}het\ n_n\text{"} \ \epsilon\ het\ n + 1_{n+1} \equiv \text{"}het\ n_n\text{"} \sim\epsilon\ het\ n_{n+1} \qquad (12)$$

Si "$het\ 1_1$" no pertenece a $het\ 1_2$ (que nos está dado según (2) en conexión con "$het\ 1_1$"), entonces pertenece a $het\ 2_2$, y si pertenece a $het\ 1_2$, entonces no pertenece a $het\ 2_2$. Todos los aspectos paradojales, que se debían a la falta de distinción de niveles y a la identificación de clases que no tenían la misma extensión, han desaparecido.

Sin los índices tendríamos la expresión paradojal (6), si eliminásemos además los subíndices llegaríamos a la paradoja propiamente tal (4) y si eliminásemos por encima las comillas obtendríamos la paradoja lógica de las propiedades impredicables.

La paradoja del catálogo de los catálogos que no se mencionan a sí mismos, que no es sino otra formulación de la paradoja de Grelling, se obtiene utilizando "s" para denotar catálogos (clases de menciones) y traduciendo "$Cm'a$" por "la mención de a (la expresión que menciona a *a*) empleando comillas". En completa analogía a (3), obtenemos la siguiente definición de *"sct"* (que representa un catálogo de catálogos, un supercatálogo):

$$sct =_{df} \lambda Cm's(Cm's \sim\in s) \qquad (13)$$

es decir, *"sct"* es definido por "la clase de menciones de catálogos, las cuales no están contenidas (no figuran) en su catálogo respectivo". Esta definición peca igualmente que (3) contra la teoría de los niveles del lenguaje y debido a ella se obtiene la expresión análoga a (4).

$$\text{"}sct\text{"} \in sct \qquad \text{"}sct\text{"} \sim\in sct \qquad (14)$$

Para exponer esta formulación de la última paradoja en idioma común consideramos los catálogos que no se mencionan a sí mismos, o más precisamente, las menciones de catálogos que no figuran en sus catálogos respectivos. De éstos se ha formado (según definición (13)) el supercatálogo *sct*. Si ahora *sct* no se menciona, es decir, si *"sct"* no figura en *sct*, entonces (según definición (13)) *"sct"* $\in$ *sct*, y también viceversa *.

Las complicaciones análogas a (6) (de (5) a (12)) no se presentan en conexión con esta formulación. Si eliminásemos en (13) y (14) las comillas, obtendríamos también una paradoja lógica, la del catálogo de los catálogos que no se *contienen* a sí mismos.

Resumiendo, puede decirse que en la exposición precedente se ha tratado de señalar los rasgos característicos de varias paradojas semánticas, su mecanismo formal, es decir, la manera cómo ellas se producen (desde el punto de vista formal) y el notable paralelismo que existe tanto entre algunas de ellas como también con respecto a paradojas lógicas.

* Los catálogos se han tratado aquí como clases de menciones. Si los consideramos como algo material (los denotamos en este caso por *"m"*) y las menciones (materiales) no como elementos sino como inscritos en ellos (denotamos la relación de inscripción por *"Inscr"*), entonces tendríamos la definición completamente lícita:

$$sct =_{df} \lambda Cm'm\ (Cm'm \sim Inscr\ m)$$

donde *sct* sigue siendo una clase de menciones. En este caso no se presenta ninguna paradoja, sino es sólo imposible formar un catálogo material *msct* correspondiente a la clase *sct*. Hay muchas empresas irrealizables por razones formales (sin que ellas constituyan una paradoja) como por ejemplo la de formar dos clases exclusivas de las cuales una contenga los números pares y la otra los primos.

Bibliografía

BETH, E. W., *Les fondements logiques des mathematiques,* Paris, 1950.

CARNAP, R., *The Logical Syntax of Language,* Londres, 1937.

REICHENBACH, H., *Elements of Symbolic Logic,* Nueva York, 1950.

TARSKI, A., *On Definable Sets of Real Numbers,* en *Logic, Semantics, Metamathematics,* Oxford, 1956.

WHITEHEAD, A. N., y RUSSELL, B., *Principia Mathematica,* primer tomo, Londres, 1925.